**Доклады Национальной академии наук Беларуси**

**2015** **сентябрь–октябрь** **Том 59 № 5**

## *МАТЕМАТИКА*

*УДК 519.173*

*В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ*

# ДОСТАТОЧНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ГРАФА

*(Представлено академиком И. В. Гайшуном)*

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
*vbened@im.bas-net.by*

В данной работе доказывается достаточное условие гамильтоновости графа.
*Ключевые слова*: спектральный радиус, гамильтонов цикл, гамильтонова цепь, минимальная степень.

*V. I. BENEDIKTOVICH*

**SUFFICIENT SPECTRAL CONDITION FOR HAMILTONICITY OF A GRAPH**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
*vbened@im.bas-net.by*

In this article the sufficient spectral condition for Hamiltonicity of a graph has been proved.
*Keywords*: Spectral radius, Hamiltonian cycle, Hamiltonian path, minimum degree.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный связный граф порядка $n$ и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A = A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей), или его *спектром*. Наибольшее собственное значение $\lambda_1$ называется *спектральным радиусом* графа $G$ и часто обозначается через $\rho(G)$. Согласно известной теореме Перрона–Фробениуса, спектральный радиус $\rho(G)$ является положительным действительным числом кратности 1 и существует единичный положительный собственный вектор (с положительными компонентами), относящийся к нему, называемый *вектором Перрона*.

Для произвольной вершины $v_i \in V$ графа $G$ ее степень $\deg_G(v)$ обозначим через $d_i$. Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – последовательность степеней графа $G$, упорядоченная по возрастанию: $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Тогда $d_1 = \delta$ называется *минимальной степенью* графа $G$.

*Объединением* двух простых графов $G$ и $H$ называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы $G$ и $H$ не пересекаются ($V(G) \cap V(H) = \varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение $k$ копий графа $G$ обозначается через $kG$. *Соединением* непересекающихся графов $G$ и $H$ называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа $G$ с каждой вершиной графа $H$.

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа $G$, называются *гамильтоновыми*. Граф $G$, содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым* или *трассируемым*. Как известно, *задача распознавания* гамильтоновости или трассируемости заданного графа является NP-полной. Недавно для решения этой проблемы стала применяться спектральная теория графов.

В 1986 г. Brualdi и Solheid [1] поставили следующую проблему:

П р о б л е м а 1. *Какой максимальный спектральный радиус у графа G на n вершинах, принадлежащего специальному классу графов?*

В последнее время интенсивно изучалась следующая тесно связанная проблема:

П р о б л е м а 2. *Для заданного графа F каким максимальным спектральным радиусом должен обладать граф G на n вершинах, не содержащий подграфа, изоморфного графу F?*

Проблема 2 рассматривалась для случаев, когда граф $F$ является кликой, четной (нечетной) цепью (циклом) заданной длины и гамильтоновой цепью (циклом) [2–5]. В частности, изучались достаточные спектральные условия для существования гамильтоновых цепей и циклов. Fiedler, Nikiforov получили некоторые достаточные условия для существования гамильтоновых цепей и циклов в терминах спектральных радиусов графов и дополнений графов [2]. Lu и др. [3] изучали достаточные условия для гамильтоновых цепей в связных графах и гамильтоновых циклов в двудольных графах в терминах спектрального радиуса графа. Некоторые другие спектральные условия для гамильтоновых цепей и циклов в графах получены в [6–7].

Совсем недавно [8] было найдено следующее достаточное условие трассируемости графа в терминах спектрального радиуса.

Т е о р е м а 1 [8]. *Пусть $G$ граф на $n \geq 4$ вершинах с $\delta \geq 1$. Если $\rho(G) > n - 3$, то $G$ содержит гамильтонову цепь, кроме случаев, когда $G \in \{K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1), K_2 \vee 4K_1, K_1 \vee (K_{1,3} + K_1)\}$.*

В данной работе будет получена нижняя оценка спектрального радиуса для гамильтоновости графа.

Т е о р е м а 2. *Пусть $G$ – простой связный граф на $n > 8$ вершинах с $\delta \geq 2$, отличный от графов $5K_1 \vee K_4$, $K_3 \vee (K_{1,4} + K_1)$, $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$, $K_1 \vee (K_{n-3} + K_2)$. Тогда если его спектральный радиус $\rho(G) \geq n-3$, то граф $G$ гамильтонов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства нам понадобятся следующие известные факты.

Л е м м а 1 [9]. *Пусть $G$ – простой граф порядка $n$ с $m$ ребрами и минимальной степенью вершин $\delta$. Тогда его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta+1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2}.$$

Л е м м а 2 [9]. *Функция $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(2m - xn)}$ является убывающей функцией на промежутке $[1; n-1]$, где $n - 1 \leq m \leq n(n-1)/2$ и $2m \geq xn$.*

В силу лемм 1, 2, а также условий теоремы, мы получаем, что спектральный радиус

$$n - 3 \leq \rho(G) \leq \frac{1 + \sqrt{9 + 8(m-n)}}{2}.$$

Из этого неравенства после преобразований получаем

$$n^2 - 5n + 10 \leq 2m. \tag{1}$$

Предположим, что граф $G$ негамильтонов. Тогда, согласно теореме Хватала [10], существует натуральное число $k$, такое, что $d_k \leq k < \frac{n}{2}$ и $d_{n-k} \leq n - k - 1$ для последовательности степеней графа $G$: $\delta = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n = \Delta$. Поэтому имеем следующую цепочку неравенств:

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d_i \leq k \cdot k + (n-2k)(n-k-1) + k(n-1) = n^2 + 3k^2 + k - 2kn - n. \tag{2}$$

Используя неравенство (1) получаем

$$n^2 - 5n + 10 \leq n^2 + 3k^2 + k - 2kn - n.$$

Откуда следует

$$3k^2 + k - 10 \geq (2k-4)n \geq (2k-4)(2k+1) = 4k^2 - 6k - 4$$

или

$$k^2 - 7k + 6 = (k-1)(k-6) \leq 0,$$

поэтому, поскольку $k \in \mathbb{N}$, имеем $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Однако в силу условия $\delta \geq 2$ сразу замечаем, что $k \neq 1$.

Рассмотрим случай $k = 2$. Тогда $d_1 = d_2 = 2, d_{n-2} \le n-3$ и неравенство (2) нам дает верхнюю оценку: $2m \le n^2 - 5n + 14$. Таким образом, вместе с неравенством (1) имеем

$$\frac{n(n-5)}{2} + 5 \le m \le \frac{n(n-5)}{2} + 7 = C_{n-2}^2 + 4.$$

Заметим, что верхняя оценка $C_{n-2}^2 + 4$ для числа ребер графа $G$ достигается только для графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$, каким по условию теоремы граф $G$ не является.

Нетрудно видеть, что негамильтоновым графом $G$ с числом ребер $C_{n-2}^2 + 3$ может быть либо граф $K_1 \vee (K_{n-3} + K_2)$, который входит в список исключений теоремы, либо граф $G$, который получается из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением одного ребра.

Покажем, что граф, который получается из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением одного ребра имеет спектральный радиус $\rho(G) < n-3$. В силу условий $d_1 = d_2 = 2, d_{n-2} \le n-3$ граф $G$ может иметь только одну из следующих последовательностей степеней (рисунок):

1) $2, 2, \underbrace{(n-3), \ldots, (n-3)}_{n-4}, (n-2), (n-2)$, т. е. $G = 2K_1 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$;

2) $2, 2, (n-4), (n-4), \underbrace{(n-3), \ldots, (n-3)}_{n-6}, (n-1), (n-1)$, т. е. $G = K_2 \vee ((2K_1 \vee K_{n-6}) + 2K_1)$;

3) $2, 2, (n-4), \underbrace{(n-3), \ldots, (n-3)}_{n-5}, (n-2), (n-1)$.

Пусть $y^T = (y_1\ y_2 \cdots y_n) > 0$ – вектор Перрона, соответствующий спектральному радиусу $\rho(G) =: \theta > 0$. Введем обозначение

$$C := \sum_{i=1}^{n-2} y_i. \tag{3}$$

Рассмотрим случай 1). При нумерации вершин графа $G$, указанной на рисунке, *а*, его матрица смежности имеет вид

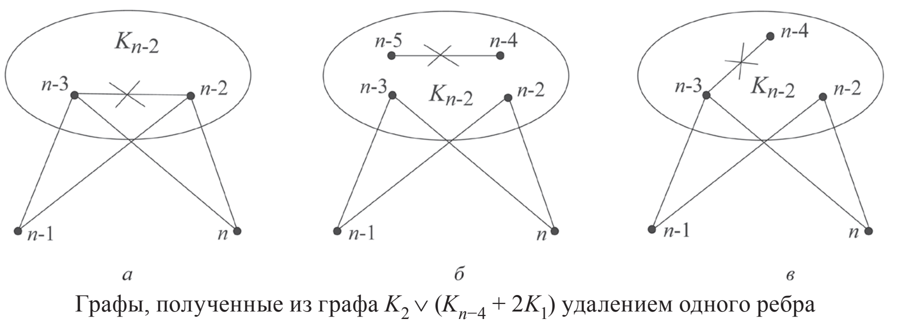
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-4} \\ A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $Ay = \theta y$ получаем, что при $i = \overline{1, n-4}$

$$A_i y = y_1 + \ldots + y_{i-1} + y_{i+1} + \ldots + y_{n-2} = \theta y_i,$$

откуда в силу обозначения (3) имеем

$$y_i = \frac{C}{\theta + 1}, \ i = \overline{1, n-4}.$$




Графы, полученные из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением одного ребра

Из равенств

$$A_{n-3}y = y_1 + ... + y_{n-4} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-3};$$
$$A_{n-2}y = y_1 + ... + y_{n-4} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-2}$$

с учетом равенства (3) вытекают равенства $y_{n-3} = y_{n-2}$ и $C + y_{n-1} + y_n = (\theta+2)y_{n-3}$. Далее, из равенств

$$A_{n-1}y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-1};$$
$$A_n y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_n$$

вытекают равенства $y_{n-1} = y_n$ и $2y_{n-3} = \theta y_{n-1}$. Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C + 2y_{n-1} = (\theta+2)y_{n-3}; \\ 2y_{n-3} = \theta y_{n-1} \end{cases}$$

получаем

$$y_{n-3} = y_{n-2} = \frac{\theta C}{\theta(\theta+2)-4};$$
$$y_{n-1} = y_n = \frac{2C}{\theta(\theta+2)-4}.$$

Подставляя теперь найденные компоненты вектора Перрона $y$ в равенство (3), получим

$$\frac{C}{\theta+1}(n-4) + \frac{2\theta C}{\theta(\theta+2)-4} = C.$$

Разделив последнее равенство на $C > 0$ и преобразовав его, получим равенство

$$f(\theta) := \theta^3 + (5-n)\theta^2 + 2(2-n)\theta + 4(n-5) = 0.$$

Таким образом, спектральный радиус $\rho(G)$ является корнем многочлена $f(\theta)$. Покажем теперь, что все корни этого многочлена лежат левее числа $n-3$. Действительно, при условии теоремы $n > 8$ легко проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$f(n-3) = 2n - 14 > 0;$$
$$f'(n-3) = 3\theta^2 + 2(5-n)\theta + 2(2-n)\Big|_{\theta=n-3} = n^2 - 4n + 1 > 0;$$
$$f''(n-3) = 6\theta + 2(5-n)\Big|_{\theta=n-3} = 4n - 8 > 0;$$
$$f'''(n-3) = 6 > 0.$$

Следовательно, по теореме Фурье–Бюдана [12] на интервале $[n-3;+\infty)$ нет корней многочлена $f(\theta)$. Тем самым, показано, что $\rho(G) < n-3$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим случай 2). При нумерации вершин графа $G$, указанной на рисунке, *б*, его матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & ... & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-6} \\ A_{n-5} \\ A_{n-4} \\ A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $Ay = \theta y$ получаем, что при $i = \overline{1, n-6}$

$$A_i y = y_1 + \ldots + y_{i-1} + y_{i+1} + \ldots + y_{n-2} = \theta y_i,$$

откуда в силу обозначения (3) имеем

$$y_i = \frac{C}{\theta+1}, \ i = \overline{1, n-6}.$$

Из равенств

$$A_{n-5} y = y_1 + \ldots + y_{n-6} + y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-5};$$
$$A_{n-4} y = y_1 + \ldots + y_{n-6} + y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-4}$$

и $\theta > 0$ с учетом равенства (3) вытекают равенства $y_{n-5} = y_{n-4}$ и $C = (\theta+2) y_{n-5}$. Поэтому $y_{n-5} = y_{n-4} = \dfrac{C}{\theta+2}$. Далее, из равенств

$$A_{n-3} y = y_1 + \ldots + y_{n-4} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-3};$$
$$A_{n-2} y = y_1 + \ldots + y_{n-3} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-2}$$

вытекают равенства $C + y_{n-1} + y_n = (\theta+1) y_{n-3}$ и $C + y_{n-1} + y_n = (\theta+1) y_{n-2}$. Откуда $y_{n-3} = y_{n-2}$. Кроме того, из равенств

$$A_{n-1} y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-1};$$
$$A_n y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_n$$

следует, что $y_{n-1} = y_n$. Поэтому получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C + 2 y_{n-1} = (\theta+1) y_{n-3}; \\ 2 y_{n-3} = \theta y_{n-1}, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$y_{n-3} = y_{n-2} = \frac{\theta C}{\theta(\theta+1)-4};$$
$$y_{n-1} = y_n = \frac{2C}{\theta(\theta+1)-4}.$$

Подставляя теперь найденные компоненты вектора Перрона $y$ в равенство (3), получим

$$\frac{C}{\theta+1}(n-6) + \frac{2C}{\theta+2} + \frac{2\theta C}{\theta(\theta+1)-4} = C.$$

Разделив последнее равенство на $C > 0$ и преобразовав его, получим равенство

$$f(\theta) := \theta^4 + (6-n)\theta^3 + 3(3-n)\theta^2 + 2(n-10)\theta + 8(n-6) = 0.$$

Таким образом, спектральный радиус $\rho(G)$ является корнем многочлена $f(\theta)$. Покажем теперь, что все корни этого многочлена лежат левее числа $n-3$. Действительно, при условии теоремы $n > 8$ нетрудно проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$f(n-3) = 2n^2 - 18n + 12 > 0;$$
$$f'(n-3) = 4\theta^3 + 3(6-n)\theta^2 + 6(3-n)\theta + 2(n-10)\Big|_{\theta=n-3} = n(n-3)^2 + 2(n-10) > 0;$$
$$f''(n-3) = 12\theta^2 + 6(6-n)\theta + 6(3-n)\Big|_{\theta=n-3} = 6(n-3)(n-1) > 0;$$
$$f'''(n-3) = 24\theta + 6(6-n)\Big|_{\theta=n-3} = 18(n-2) > 0;$$
$$f^{(4)}(n-3) = 24 > 0.$$

Следовательно, по теореме Фурье–Бюдана [12] на интервале $[n-3; +\infty)$ нет корней многочлена $f(\theta)$. Тем самым показано, что $\rho(G) < n-3$, что противоречит условию теоремы.

Наконец, рассмотрим случай 3). При нумерации вершин, указанной на рисунке, *в*, его матрица смежности имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-5} \\ A_{n-4} \\ A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $Ay=\theta y$ получаем, что для $i=\overline{1,n-5}$

$$A_i y = y_1+\ldots+y_{i-1}+y_{i+1}+\ldots+y_{n-2}=\theta y_i,$$

откуда в силу обозначения (3) имеем

$$y_i=\frac{C}{\theta+1},\ i=\overline{1,n-5}.$$

Из равенств

$$A_{n-4}y=y_1+\ldots+y_{n-5}+y_{n-2}=\theta y_{n-4};$$
$$A_{n-3}y=y_1+\ldots+y_{n-5}+y_{n-2}+y_{n-1}+y_n=\theta y_{n-3};$$
$$A_{n-2}y=y_1+\ldots+y_{n-3}+y_{n-1}+y_n=\theta y_{n-2};$$
$$A_{n-1}y=A_n y=y_{n-3}+y_{n-2}=\theta y_{n-1}=\theta y_n$$

и $\theta>0$ вытекает равенство $y_{n-1}=y_n$ и, с учетом равенства (3), система линейных уравнений

$$\begin{cases} (1+\theta)y_{n-4}+y_{n-3}=C; \\ y_{n-4}+(1+\theta)y_{n-3}-2y_{n-1}=C; \\ (1+\theta)y_{n-2}-2y_{n-1}=C; \\ y_{n-3}+y_{n-2}-\theta y_{n-1}=0, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$y_{n-4}=\frac{\theta^3+\theta^2-4\theta-4}{\theta^4+3\theta^3-2\theta^2-8\theta-2}C;$$
$$y_{n-3}=\frac{\theta^3+\theta^2+2}{\theta^4+3\theta^3-2\theta^2-8\theta-2}C;$$
$$y_{n-2}=\frac{\theta^3+2\theta^2-2}{\theta^4+3\theta^3-2\theta^2-8\theta-2}C;$$
$$y_{n-1}=y_n=\frac{2\theta^2+3\theta}{\theta^4+3\theta^3-2\theta^2-8\theta-2}C.$$

Подставляя теперь найденные компоненты вектора Перрона $y$ в равенство (3), получим

$$\frac{C}{\theta+1}(n-5)+\frac{(\theta^3+\theta^2-4\theta-4)+(\theta^3+\theta^2+2)+(\theta^3+2\theta^2-2)}{\theta^4+3\theta^3-2\theta^2-8\theta-2}C=C.$$

Разделив последнее равенство на $C>0$ и преобразовав его, получим равенство

$$f(\theta) := \theta^5 + (6-n)\theta^4 + 3(3-n)\theta^3 + 2(n-10)\theta^2 + (8n-42)\theta + (2n-8) = 0.$$

Таким образом, спектральный радиус $\rho(G)$ является корнем многочлена $f(\theta)$. Покажем теперь, что все корни многочлена лежат левее числа $n-3$. Действительно, при условии теоремы $n > 8$ нетрудно проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$f(n-3) = 2n^3 - 24n^2 + 74n - 62 > 0;$$
$$f'(n-3) = 5\theta^4 + 4(6-n)\theta^3 + 9(3-n)\theta^2 + 4(n-10)\theta + (8n-42)\Big|_{\theta=n-3} = n(n-3)^3 + 4n^2 - 44n + 78 > 0;$$
$$f''(n-3) = 20\theta^3 + 12(6-n)\theta^2 + 18(3-n)\theta + 4(n-10)\Big|_{\theta=n-3} = 2(n-3)^2(4n-3) + 4(n-10) > 0;$$
$$f'''(n-3) = 60\theta^2 + 24(6-n)\theta + 18(3-n)\Big|_{\theta=n-3} = 18(n-3)(2n-1) > 0;$$
$$f^{(4)}(n-3) = 120\theta + 24(6-n)\Big|_{\theta=n-3} = 96n - 196 > 0;$$
$$f^{(5)}(n-3) = 120 > 0.$$

Следовательно, по теореме Фурье–Бюдана [12] на интервале $[n-3;+\infty)$ нет корней многочлена $f(\theta)$. Тем самым, показано, что $\rho(G) < n-3$, что противоречит условию теоремы.

Аналогично можно показать, что граф, который получается из графа $K_1 \vee (K_{n-3} + K_2)$ удалением одного ребра также имеет спектральный радиус $\rho(G) < n-3$.

Отметим, что для графа, полученного из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением двух ребер, это неравенство также справедливо в силу следующего утверждения.

Л е м м а 3 [11]. *Пусть $G$ – простой связный граф и $H$ – его собственный подграф. Тогда* $\rho(G) > \rho(H)$.

Таким образом, предположение о негамильтоновости графа $G$ при $k = 2$ приводит к противоречию с условиями теоремы.

Пусть $k = 3$. Тогда из неравенства (2) получаем, что $n \le 10$, а следовательно, $n \in \{9; 10\}$. Если $n = 9$, то из (2) получаем $23 \le m \le 24$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (3; 3; 3; 5; 5; 5; 8; 8; 8), которая соответствует графу $G = K_3 \vee (3K_1 + K_3)$. Нетрудно проверить, что для этого графа $\rho(G) = 5{,}864 < 6$, а значит, по лемме 3 для всех графов $H$, которые получаются из графа $G$ удалением одного ребра, также имеет место неравенство $\rho(H) < 6$, что неверно по условию теоремы.

Если $n = 10$, то из (2) получаем, что $m = 30$, причем это число ребер графа достигается для последовательности степеней (3; 3; 3; 6; 6; 6; 6; 9; 9; 9), которая соответствует графу $G = K_3 \vee (3K_1 + K_4)$. Нетрудно проверить, что для этого графа $\rho(G) = 6{,}646 < 7$, что неверно по условию теоремы.

Пусть $k = 4$. Тогда из неравенства (2) получаем, что $n \le 10$, и следовательно, $n \in \{9; 10\}$. Если $n = 9$, то получаем, что $23 \le m \le 26$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (4; 4; 4; 4; 4; 8; 8; 8; 8), которая соответствует графу $G = 5K_1 \vee K_4$, входящему в список исключений теоремы. Последовательностями степеней, удовлетворяющими условию $m = 25$, являются последовательность (3; 4; 4; 4; 4; 7; 8; 8; 8), которая соответствует графу $G = K_3 \vee (K_{1,4} + K_1)$, также входящему в список исключений теоремы, или последовательность (4; 4; 4; 4; 4; 7; 7; 8; 8), которая соответствует графу $H = 2K_1 \vee (K_2 \vee 5K_1)$ со спектральным радиусом $\rho(H) = 5{,}915 < 6$, что неверно по условию теоремы. Последовательностями, удовлетворяющими условию $m = 24$, и не соответствующими собственному подграфу $H$, могут быть только три последовательности: (2; 4; 4; 4; 4; 7; 7; 8; 8), (3; 3; 4; 4; 4; 6; 8; 8; 8) или (3; 3; 4; 4; 4; 7; 7; 8; 8). Нетрудно проверить, что спектральные радиусы графов $G_1, G_2, G_3$, соответствующих этим последовательностям, равны $\rho(G_1) = 5{,}89$; $\rho(G_2) = 5{,}85$; $\rho(G_3) = 5{,}837$. Таким образом, все негамильтоновы графы $G$ порядка $n = 9$ с $m = 24$, а значит, графы с $m = 23$, которые являются их собственными подграфами, удовлетворяют неравенству $\rho(G) < 6$, что неверно по условию теоремы.

Если $n = 10$, то из (2) получаем, что $30 \le m \le 31$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (4; 4; 4; 4; 5; 5; 9; 9; 9; 9), которая соответствует графу $G = K_4 \vee (4K_1 + K_2)$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 6,757 < 7$, а значит, по лемме 3 для всех графов *H*, которые получаются из графа *G* удалением одного ребра, также имеет место неравенство $\rho(H) < 7$, что неверно по условию теоремы.

Пусть $k = 5$. Тогда из неравенства (2) получаем, что $n \le 11$. Но $2k + 1 \le n$, т. е. $11 \le n$. Поэтому $n = 11$. Тогда из (2) получаем, что $76 \le m \le 80$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (5; 5; 5; 5; 5; 5; 10; 10; 10; 10; 10), которая соответствует графу $G = 6K_1 \vee K_5$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 7,831 < 8$, а значит, по лемме 3 для всех графов *H*, которые получаются из графа *G* удалением 1–4 ребер, также имеет место неравенство $\rho(H) < 6$, что неверно по условию теоремы.

Наконец, пусть $k = 6$. Тогда из неравенства (2) получаем $n \le 13$, а из неравенства $2k + 1 \le n$ получаем $13 \le n$. Поэтому $n = 13$. Тогда $m = 57$, причем это число ребер графа достигается для последовательности степеней (6; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 12; 12; 12; 12; 12; 12), которая соответствует графу $G = 7K_1 \vee K_6$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 9,446 < 10$, что неверно по условию теоремы.

Таким образом, предположение о негамильтоновости графа *G* приводит к противоречию с условиями теоремы, и тем самым она доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф14РА-004).

## Список использованной литературы

1. *Brualdi, R. A.* On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones / R. A. Brualdi, E. S. Solheid // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. – 1986. – Vol. 7, N 2. – P. 265–272.

2. *Fiedler, M.* Spectral radius and Hamiltonicity of graphs / M. Fiedler, V. Nikiforov // Linear Algebra Appl. – 2010. – Vol. 432. – P. 2170–2173.

3. *Lu, M.* Spectral radius and Hamiltonian graphs / M. Lu, H. Liu, F. Tian // Linear Algebra Appl. – 2012. – Vol. 437. – P. 2670–2741.

4. *Nikiforov, V.* The spectral radius of graphs without paths and cycles of specified length / V. Nikiforov // Linear Algebra Appl. – 2010. – Vol. 432. – P. 2243–2256.

5. *Yuan, W.* On the spectral radii of graphs without given cycles / W. Yuan, B. Wang, M. Zhai // Electron. J. Linear Algebra. – 2012. – Vol. 23. – P. 599–606.

6. *Krivelevich, M.* Spase pseudo-random graphs are Hamiltonian / M. Krivelevich, B. Sudakov // J. Graph Theory. – 2003. – Vol. 42, N 1. – P. 17–33.

7. *Mohar, B.* A domain monotonicity theorem for graphs and hamiltonicity / B. Mohar // Discrete Appl. Math. – 1992. – Vol. 36, N 2. – P. 169–177.

8. *Ning, B.* Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs / B. Ning, J. Ge // Linear and Multilinear Algebra. – 2014. – Vol. 63, N 8. – P. 1520–1530.

9. *Hong, Y.* A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // J. Combin. Theory. – 2001. – Vol. 81. – P. 177–183.

10. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990.

11. *Brouwer, A. E.* Spectra of graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – Springer–Verlag, 2011.

12. *Прасолов, В. В.* Многочлены / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2001.

*Поступило в редакцию 25.05.2015*